المحاضرة الثانية التقريب وحساب الأخطاء

1.2. تدوير الأعداد الحقيقية.

ليكن $Z = a.a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n$ عدداً حقيقياً إنَّ تدوير (تقريب) العدد الحقيقي Z يعني الاكتفاء بـ $n-1$ عدد بعد الفاصلة بدلاً من n عدد، وبالتالي فإنَّ العدد الحقيقي Z يكتب على الشكل $\tilde{Z} = a.a_1 a_2 ... a'_{n-1}$.

ولإجراء تدوير للعدد Z نميز الحالات الآتية:

1- إذا كان $a_n > 5$ فإنَّ $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$.

2- إذا كان $a_n < 5$ فإنَّ $a'_{n-1} = a_{n-1}$.

3- إذا كان $a_n = 5$ عندئذ نميز حالتين:

- إذا كان زوجياً فإنَّ $a'_{n-1} = a_{n-1}$.
- إذا كان فردياً فإنَّ $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$.

ملاحظة.

إنَّ الخطأ المرتكب عند تدوير العدد الحقيقي Z يساوي $|Z - \tilde{Z}|$ وهو لا يتجاوز 5×10^{-n}، أي إنَّ $|Z - \tilde{Z}| \le 5 \times 10^{-n}$.

مثال.1.

دور كل من الأعداد الحقيقية الآتية:

1- $Z_1 = 5.4527$ إلى ثلاث أرقام بعد الفاصلة.

2- $Z_2 = 5.453$ إلى رقمين بعد الفاصلة.

3- $Z_3 = 5.14525$ إلى أربع أرقام بعد الفاصلة.

4- $Z_4 = 5.4535$ إلى ثلاث أرقام بعد الفاصلة.

ثم بين الخطأ المرتكب عند كل عملية تدوير.

الحل.

1- بما أنَّ $a_4 = 7 > 5$ فإنَّ $\tilde{Z}_1 = 5.453$، أما الخطأ المرتكب $|Z_1 - \tilde{Z}_1| = 3 \times 10^{-4}$ وهو لا يتجاوز 5×10^{-4}.

2- بما أنَّ $a_3 = 3 < 5$ فإنَّ $\tilde{Z}_2 = 5.45$، أما الخطأ المرتكب $|Z_2 - \tilde{Z}_2| = 3 \times 10^{-3}$ وهو لا يتجاوز 5×10^{-3}.

3- بما أنَّ ($a_5 = 5$ و $a_4 = 2$ زوجي) فإنَّ $\tilde{Z}_3 = 5.1452$، أما الخطأ المرتكب $|Z_3 - \tilde{Z}_3| = 5 \times 10^{-5}$.

4- بما أنَّ ($a_4 = 5$ و $a_3 = 3$ فردي) فإنَّ $\tilde{Z}_4 = 5.454$، أما الخطأ المرتكب $|Z_3 - \tilde{Z}_3| = 5 \times 10^{-5}$.

تمرين.1.

دور كل من الأعداد الحقيقية الآتية:

1- $Z_1 = 1.2468$ إلى ثلاث أرقام بعد الفاصلة.

2- $Z_2 = 3.132$ إلى رقمين بعد الفاصلة.

3- $Z_3 = 9.16625$ إلى أربع أرقام بعد الفاصلة.

4- $Z_4 = 8.2035$ إلى ثلاث أرقام بعد الفاصلة.

ثم بين الخطأ المرتكب عند كل عملية تدوير.

2.2. الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

ليكن $Z = a.a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n$ عدداً حقيقياً ولنفرض أنَّ $\tilde{Z}$ هي القيمة التقريبية له، عندئذ فإنَّ:

– **الخطأ المطلق** الناتج عن عملية التدوير: $\delta_Z = \lvert\Delta_Z\rvert = \lvert Z - \tilde{Z}\rvert \le 5\times 10^{-n}$	– **الخطأ النسبي** الناتج عن عملية التدوير: $e_Z = \dfrac{\delta_Z}{\lvert Z\rvert}$

ملاحظة.

لتكن $\tilde{Z} = a.a_1 a_2 ... a_{n-1}$ هي القيمة التقريبية لعدد حقيقي Z، عندئذ فإنَّ $e_Z = \dfrac{\delta_Z}{\lvert\tilde{Z}\rvert}$، ونعتبر عند حساب الخطأ النسبي أنَّ $\delta_Z = 5\times 10^{-n}$ كونها أكبر قيمة ممكنة للخطأ المطلق.

مثال.2.

دور العدد الحقيقي $Z = 5.358$ إلى رقمين بعد الفاصلة، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتجين عن عملية التدوير.

الحل.

– بما أنَّ $a_3 = 8 > 5$ فإنَّ $\tilde{Z} = 5.36$.

– الخطأ المطلق المرتكب $\delta_Z = \lvert Z - \tilde{Z}\rvert = \lvert 5.358 - 5.36\rvert = 0.002$ وهو لا يتجاوز 5×10^{-3}.

– الخطأ النسبي $e_Z = \dfrac{\delta_Z}{\lvert Z\rvert} = \dfrac{0.002}{5.358} = 0.000373273$.

مثال.3.

ليكن $Z = 5.358$ هي القيمة التقريبية لعدد حقيقي Z، احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتجين عن عملية تدوير العدد الحقيقي Z.

الحل.

– بما أنَّ العدد المعطى مدوراً فإنَّ $\delta_Z \le 5\times 10^{-4}$.

– الخطأ النسبي $e_Z = \dfrac{\delta_Z}{\lvert Z\rvert} = \dfrac{5\times 10^{-4}}{5.358} = 9.331840239\times 10^{-5} = 0.00009331840239$.

تمرين.2.

أولاً. دور كل من الأعداد الحقيقية الآتية:

1– $Z_1 = 1.2468$ إلى ثلاث أرقام بعد الفاصلة.
2– $Z_2 = 3.132$ إلى رقمين بعد الفاصلة.
3– $Z_3 = 9.16625$ إلى أربع أرقام بعد الفاصلة.
4– $Z_4 = 8.2035$ إلى ثلاث أرقام بعد الفاصلة.

ثم أوجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتجين عن عملية التدوير.

ثانياً. لنفرض أنَّ $Z_1 = 1.2468, Z_2 = 3.132, Z_3 = 9.16625, Z_4 = 8.2035$ هي القيم التقريبية للأعداد الحقيقية Z_1, Z_2, Z_3, Z_4، احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتجين عن عملية تدوير لكل من الأعداد المفروضة.

مبرهنة.1.

لتكن Z_1,Z_2 هي القيم التقريبية للعددين الحقيقيين Z_1,Z_2 ، عندئذ فإنَّ:

$\delta_{Z_1+Z_2} \le \delta_{Z_1} + \delta_{Z_2}$	$\delta_{Z_1-Z_2} \le \delta_{Z_1} + \delta_{Z_2}$	$\delta_{Z_1\cdot Z_2} \le \lvert\tilde{Z}_2\rvert\delta_{Z_1} + \lvert\tilde{Z}_1\rvert\delta_{Z_2}$	$\delta_{\frac{Z_1}{Z_2}} \le \dfrac{\lvert\tilde{Z}_2\rvert\delta_{Z_1} + \lvert\tilde{Z}_1\rvert\delta_{Z_2}}{\tilde{Z}_2^{\,2}}$
$e_{Z_1+Z_2} \le e_{Z_1} + e_{Z_2}$	$e_{Z_1-Z_2} \le e_{Z_1} + e_{Z_2}$	$e_{Z_1\cdot Z_2} \le e_{Z_1} + e_{Z_2}$	$e_{\frac{Z_1}{Z_2}} \le e_{Z_1} + e_{Z_2}\ ;\ Z_2 \ne 0$

مثال.4.

لتكن $\tilde{Z}_1 = 2.345, \tilde{Z}_2 = 3.5364$ هي القيم التقريبية للعددين الحقيقيين Z_1,Z_2 ، عندئذ احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتج عن العمليات الحسابية الآتية $Z_1+Z_2\,, Z_1-Z_2\,, Z_1\cdot Z_2\,, \dfrac{Z_1}{Z_2}$.

الحل.

بما أنَّ العددين الحقيقيين Z_1,Z_2 مدورين فإنَّ $\delta_{Z_1} \le 5\times10^{-4}, \delta_{Z_2} \le 5\times10^{-5}$ وبالتالي:

$e_{Z_2} = \dfrac{\delta_{Z_2}}{\tilde{Z}_2} = \dfrac{5\times10^{-5}}{3.5364} = 0.0000141386721$	$e_{Z_1} = \dfrac{\delta_{Z_1}}{\tilde{Z}_1} = \dfrac{5\times10^{-4}}{2.345} = 0.0002132196162$
نلاحظ أنَّ: $e_{Z_1\mp Z_2}\,, e_{Z_1\cdot Z_2}\,, e_{\frac{Z_1}{Z_2}} \le e_{Z_1} + e_{Z_2} = \dfrac{5\times10^{-4}}{2.345} + \dfrac{5\times10^{-5}}{3.5364} = 0.0002273582883$	
$e_{Z_1+Z_2} = \dfrac{\delta_{Z_1+Z_2}}{\lvert Z_1+Z_2\rvert} = \dfrac{0.00055}{5.8814} = 0.00009351514945$	$\delta_{Z_1+Z_2} \le \delta_{Z_1} + \delta_{Z_2} = 0.00055$
$e_{Z_1-Z_2} = \dfrac{\delta_{Z_1-Z_2}}{\lvert Z_1-Z_2\rvert} = \dfrac{0.00055}{1.1914} = 0.000461641766$	$\delta_{Z_1-Z_2} \le \delta_{Z_1} + \delta_{Z_2} = 0.00055$
$e_{Z_1\cdot Z_2} = \dfrac{\delta_{Z_1\cdot Z_2}}{\lvert Z_1\cdot Z_2\rvert} = \dfrac{0.00188545}{8.292858} = 0.0002273582883$	$\delta_{Z_1\cdot Z_2} \le \lvert\tilde{Z}_2\rvert\delta_{Z_1} + \lvert\tilde{Z}_1\rvert\delta_{Z_2} = 0.00188545$
$e_{\frac{Z_1}{Z_2}} = \dfrac{\delta_{\frac{Z_1}{Z_2}}}{\left\lvert\dfrac{Z_1}{Z_2}\right\rvert} = 0.0002273582882$	$\delta_{\frac{Z_1}{Z_2}} \le \dfrac{\lvert\tilde{Z}_2\rvert\delta_{Z_1} + \lvert\tilde{Z}_1\rvert\delta_{Z_2}}{\tilde{Z}_2^{\,2}} = 0.000150762127$

تمرين.3.

لتكن $\tilde{Z}_1 = 1.8, \tilde{Z}_2 = 3.12$ هي القيم التقريبية للعددين الحقيقيين Z_1,Z_2 ، عندئذ احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتج عن العمليات الحسابية الآتية $Z_1+Z_2\,, Z_1-Z_2\,, Z_1\cdot Z_2\,, \dfrac{Z_1}{Z_2}$.

3.2. الخطأ المطلق والخطأ النسبي في حساب قيمة دالة.

لتكن $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ دالة تابعة للمتحولات الحقيقية $x_1, x_2, ..., x_n$ ، ولنفرض أنَّ δ_{x_i} هو الخطأ المطلق الناتج عن تدوير العدد x_i حيث إنَّ $i = 1, 2, ..., n$ ، عندئذ فإنَّ:

$$\left(\delta_f\right)_{\max} \le \sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\delta_{x_i}\right) \qquad \left(e_f\right)_{\max} = \left(\frac{\delta_f}{f}\right)_{\max} \le \frac{\delta_f}{f}$$

مثال.5.

أوجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x, y) = x \cdot y$ حيث إنَّ $x = 1.24,\ y = 3.53$ عددان مدوران.

الحل.

لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \qquad \delta_x = \delta_y \le 5\times 10^{-3}$$

وبالتالي:

$$\left(\delta_f\right)_{\max} \le y\,\delta_x + x\,\delta_y = \delta_x (x + y) = 5\times 10^{-3}(1.24 + 3.53) = 0.02385$$

$$\left(e_f\right)_{\max} \le \left(\frac{y\,\delta_x + x\,\delta_y}{x\,y}\right) = \frac{0.02385}{1.24\times 3.53} = 0.005448688659$$

تمرين.4.

أوجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x, y) = x + y$ حيث إنَّ $x = 1.24,\ y = 3.53$ عددان مدوران.

تنويه. $\frac{\partial f}{\partial x} = 1\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1$.

تمرين.5.

أوجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x, y) = x\,y$ حيث إنَّ $x = 2.124,\ y = 1.22$ عددان مدوران.